

ADAPTAÇÃO DE DOIS MÉTODOS COM QUARTA ORDEM DE CONVERGÊNCIA PARA ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA DE UMA COLUNA COM CONEXÃO SEMIRRÍGIDA

Categoria do Trabalho *Resumo Expandido*

*Luiz Antonio Farani de Souza, Engenheiro Civil pela UEM – Doutor em Métodos
Numéricos em Engenharia pela UFPR, professor do curso de Engenharia Civil da
UTFPR*

lasouza@utfpr.edu.br

RESUMO

A crescente simulação de modelos estruturais complexos - por meio do Método dos Elementos Finitos - tem exigido a manipulação de grande quantidade de dados, que é intrínseco ao método, bem como a procura da diminuição do tempo de resposta para a resolução do problema estrutural. Este trabalho apresenta dois procedimentos incrementais e iterativos com quarta ordem de convergência, com o objetivo de encontrar a solução aproximada do problema de uma coluna com conexão semirrígida encontrado na literatura. Os resultados numéricos foram obtidos a partir do código computacional desenvolvido em ambiente Scilab. A estrutura foi discretizada por meio da formulação Corrotacional do Método dos Elementos Finitos, e a conexão semirrígida foi simulada com um elemento de ligação de comprimento nulo. A trajetória de equilíbrio é obtida utilizando a técnica de continuação Comprimento de Arco Linear. A eficiência computacional dos métodos implementados é comparada com o procedimento clássico de Newton-Raphson. Como conclusão, um dos métodos propostos conseguiu obter a solução do sistema, dada uma tolerância, com menor número de iterações acumuladas e com menor tempo de processamento.

Palavras-chave: análise não linear, semirrigidez, métodos numéricos.

INTRODUÇÃO

Para efetuar a análise não linear de uma estrutura com maior precisão, é de fundamental importância que sejam empregados métodos incrementais e iterativos que possam

considerar, de maneira apropriada, os efeitos de grandes rotações e grandes deslocamentos (não linearidade geométrica). Uma metodologia eficiente de solução deve ser capaz de superar os problemas numéricos associados ao comportamento não linear e, além disso, de traçar a trajetória de equilíbrio com pontos limites do sistema estrutural em análise (RODRIGUES et al., 2008; MAXIMIANO et al., 2014). O procedimento incremental e iterativo de Newton-Raphson é um dos métodos mais utilizados para resolver problemas não lineares na Engenharia Estrutural. Pesquisas têm sido conduzidas com relação à implementação de métodos com terceira ou quarta ordem de convergência para a solução do sistema de equações não lineares que descreve o problema estrutural (SAFFARI; MANSOURI, 2011; SOUZA et al., 2018; MOHIT et al., 2020; SOUZA et al., 2021). Neste trabalho são apresentados dois procedimentos incrementais, com o objetivo de encontrar a solução aproximada, dada uma tolerância, do problema de uma coluna com conexão semirrígida. Tais procedimentos são desenvolvidos a partir de uma adaptação de dois métodos iterativos com quarta ordem de convergência propostos por Herceg e Herceg (2007), os quais foram desenvolvidos para encontrar a raiz de uma função não linear com uma variável. Os resultados numéricos foram obtidos com o código computacional desenvolvido com o programa livre Scilab, versão 6.1.0 (SCILAB, 2021). Para a discretização da coluna foi utilizada a formulação Corrotacional do Método dos Elementos Finitos (YAW, 2009; TANG et al., 2015), e a conexão foi simulada por meio de um elemento de ligação com comprimento nulo proposto por Del Savio et al. (2005). A trajetória de equilíbrio é obtida utilizando a técnica de continuação Comprimento de Arco Linear. A eficiência computacional dos métodos implementados é comparada com o procedimento clássico de Newton-Raphson.

METODOLOGIA

O problema básico da análise não linear é encontrar a configuração de equilíbrio de uma estrutura que está sob a ação de um carregamento aplicado. O sistema de equações não lineares que descreve o equilíbrio estático de um sistema estrutural com não linearidade geométrica é descrito por (SOUZA et al., 2018):

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}, \lambda) = \lambda \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{int}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad (1)$$

na qual \mathbf{g} é o vetor de forças residuais, \mathbf{F}_{int} é o vetor de esforços internos (avaliado em função do vetor de deslocamentos nodais \mathbf{u}) e λ é o parâmetro de força responsável pelo escalonamento do vetor de forças externas \mathbf{F}_r . O sistema dado em Equação (1) tem $(n + 1)$ incógnitas, que são o vetor \mathbf{u} com n elementos e o parâmetro λ , mas somente n equações. Assim, uma equação de restrição $c(\mathbf{u}, \lambda) = 0$ é adicionada ao sistema. A solução aproximada desse sistema é obtida por meio de um procedimento incremental e iterativo, em que para uma sequência do parâmetro de carga λ , determina-se uma sequência do correspondente de deslocamentos \mathbf{u} . Herceg e Herceg (2007) desenvolveram métodos numéricos com quarta ordem de convergência por meio de modificações do método de Newton para encontrar uma raiz da equação não linear de $f(x) = 0$. Tais métodos foram adaptados neste trabalho para o problema estrutural num procedimento incremental e iterativo. As equações iterativas para o primeiro método implementado são dadas por (método “1”), para $k = 1, 2, \dots$:

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \frac{1}{2} \delta \mathbf{u}_1^{(k+1)} - \delta \mathbf{u}_2^{(k+1)}, \quad (2)$$

$$\delta \mathbf{u}_1^{(k+1)} = [\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k)})]^{-1} [\delta \lambda_1^{(k+1)} \mathbf{F}_r + \mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k)}, \lambda^{(k)})], \quad (3)$$

$$\delta \mathbf{u}_2^{(k+1)} = \left[\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k)}) - 3\mathbf{K} \left(\mathbf{u}^{(k)} + \frac{2}{3} \delta \mathbf{u}_1^{(k+1)} \right) \right]^{-1} [\delta \lambda_2^{(k+1)} \mathbf{F}_r + \mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k)}, \lambda^{(k)})]. \quad (4)$$

Para o segundo método (método “2”), as equações iterativas são:

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \delta \mathbf{u}_1^{(k+1)} + \frac{3}{2} \delta \mathbf{u}_2^{(k+1)} - 3\delta \mathbf{u}_3^{(k+1)}, \quad (5)$$

$$\delta \mathbf{u}_2^{(k+1)} = \left[\mathbf{K} \left(\mathbf{u}^{(k)} + \frac{2}{3} \delta \mathbf{u}_1^{(k+1)} \right) \right]^{-1} [\delta \lambda_2^{(k+1)} \mathbf{F}_r + \mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k)}, \lambda^{(k)})], \quad (6)$$

$$\delta \mathbf{u}_3^{(k+1)} = \left[\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k)}) + \mathbf{K} \left(\mathbf{u}^{(k)} + \frac{2}{3} \delta \mathbf{u}_1^{(k+1)} \right) \right]^{-1} [\delta \lambda_3^{(k+1)} \mathbf{F}_r + \mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k)}, \lambda^{(k)})]. \quad (7)$$

O subincremento de deslocamento $\delta \mathbf{u}_1^{(k+1)}$ na Equação (5) é calculado conforme a Equação (3), que é o passo de Newton-Raphson. O parâmetro total de força (λ) no passo de força $t+\Delta t$ e na iteração corrente é atualizado por:

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \delta\lambda^{(k+1)}. \quad (8)$$

Os métodos de solução são associados à técnica de continuação Comprimento de Arco Linear proposta por Ramm (1981). A expressão para a determinação do subincremento do parâmetro de força $\delta\lambda_i^{(k+1)}$, com $i = 1, 2, 3$, é dada por:

$$\delta\lambda_i^{(k+1)} = -\frac{\Delta\mathbf{u}^{(k)T} \delta\mathbf{u}_g^{(k)}}{\Delta\mathbf{u}^{(k)T} \delta\mathbf{u}_r^{(k)}}, \quad (9)$$

na qual o vetor $\delta\mathbf{u}_g^{(k)}$ é o subincremento de deslocamentos nodais referentes às forças residuais \mathbf{g} e o vetor $\delta\mathbf{u}_r^{(k)}$ é o subincremento de deslocamentos nodais referentes à força externa \mathbf{F}_r .

RESULTADOS E DISCUSSÕES

A Figura 1a apresenta uma coluna com ligação semirrígida submetida a duas forças concentradas e suas propriedades geométricas (momento de inércia I e área A da seção transversal) e material (módulo de elasticidade longitudinal E). A malha de elementos finitos consiste de quatro elementos de viga-coluna, um elemento de ligação e seis nós. Os parâmetros de entrada são: comprimento de arco inicial ${}^0\Delta l = 0,15$; número de iterações desejáveis por passo de força $Kd = 6$; número máximo de iterações por passo de força $k_{máx} = 150$; tolerância para o critério de convergência $tol = 1,0 \times 10^{-7}$; e incremento de carga $\Delta P = 1,0$ N. A trajetória de equilíbrio da estrutura com o programa implementado é apresentada na Figura 1b, havendo boa concordância com os pontos de equilíbrio obtidos por Van Hai et al. (2019). Na Tabela 1 aparecem os resultados numéricos obtidos com os métodos implementados – números totais de passos de carga (NP) e iterações acumuladas (k_{total}) até a convergência para a solução aproximada, número médio de iterações por passo de carga ($k_{médio}$) e tempo de processamento em segundos (t). Na Tabela 1, vê-se que o método “2” (Equações (5) a (7)) foi mais eficiente, uma vez que apresentou convergência para a resposta do problema com um número inferior de iterações acumuladas, em comparação com o método “1” e o método clássico de Newton-Raphson. Apesar da iteração do método “2” ser mais custosa computacionalmente (há a resolução de seis sistemas de equações lineares a cada iteração) em comparação com os

demais, esse método obteve a resposta com um menor tempo de processamento. O procedimento de Newton-Raphson é dado por:

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \delta \mathbf{u}_1^{(k+1)}. \quad (10)$$

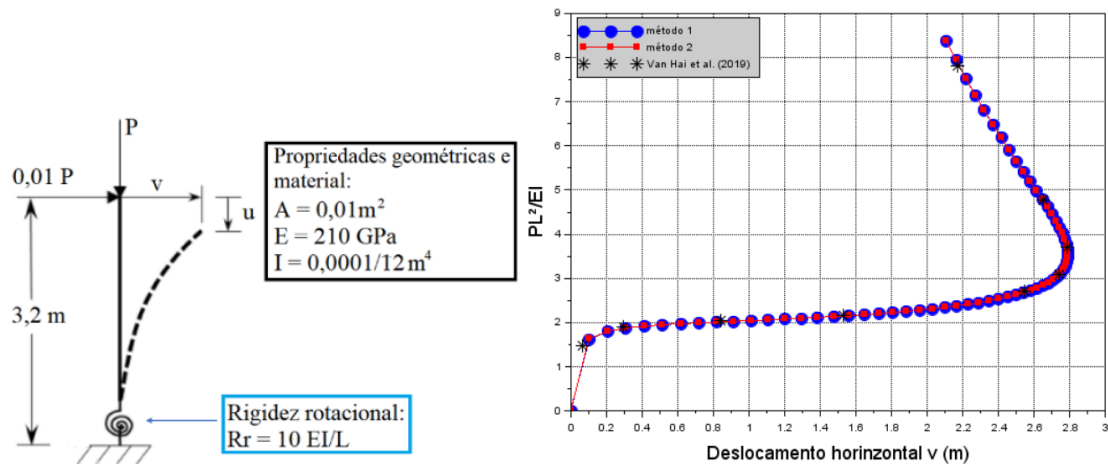


Figura 1. a) Modelo estrutural da coluna e b) trajetória de equilíbrio.

Tabela 1. Resultados numéricos (número total de incógnitas: 19)

Método de Solução	NP	\mathbf{k}_{total}	$\mathbf{k}_{médio}$	t (s)
Método "1"	64	129	2,015	1,726
Método "2"	64	64	1,000	1,092
Newton-Raphson	64	193	3,015	1,238

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As equações iterativas de dois métodos adaptados para obter a solução do sistema de equações não lineares, o qual descreve o problema estrutural, são apresentadas. Um código computacional é implementado com o programa Scilab. Os resultados numéricos mostram que o método "2" é mais eficiente do ponto de vista computacional, alcançando a solução aproximada com menor número de iterações acumuladas e menor tempo de processamento, para uma dada tolerância. Como continuidade da pesquisa, os métodos serão testados em problemas de estruturas com maior número de incógnitas.

REFERÊNCIAS

- DEL SAVIO, A. A.; ANDRADE, S. A. L.; MARTHA, L. F.; SILVA VELLASCO, P. C. G. Um sistema não-linear para análise de pórticos planos semi-rígidos. *Revista Sul-Americana de Engenharia Estrutural*, Passo Fundo, v. 2, n. 1, p. 97-125, 2005.
- HERCEG, D.; HERCEG, D. Some fourth-order methods for nonlinear equations. *Novi Sad J. Math*, v. 37, n. 2, p. 241-247, 2007.
- MAXIMIANO, D. P.; SILVA, A. R. D.; SILVEIRA, R. A. M. Iterative strategies associated with the normal flow technique on the nonlinear analysis of structural arches. *Revista Escola de Minas (Impresso)*, v. 67, n. 2, p. 143-150, 2014.
- MOHIT, M.; SHARIFI, Y.; TAVAKOLI, A. Geometrically nonlinear analysis of space trusses using new iterative techniques. *Asian Journal of Civil Engineering*, p. 1-11, 2020.
- RAMM, E. *Strategies for tracing the nonlinear response near limit points*. In: *Nonlinear finite element analysis in structural mechanics*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1981. p. 63-89.
- RODRIGUES, P. F. N.; VARELA, W. D.; SOUZA, R. A. Análise de Estratégias de Solução do Problema Não-linear. *Revista de Ciência & Tecnologia*, v. 8, n. 2, p. 36-49, 2008.
- SAFFARI, H.; MANSOURI, I. Non-linear analysis of structures using two-point method. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, v. 46, n. 6, p. 834-840, 2011.
- SCILAB, versão 6.1.0. *ESI Group*, 2020.
- SOUZA, L. A. F., CASTELANI, E. V., SHIRABAYASHI, W. V. I., ALIANO FILHO, A. MACHADO, R. D. Trusses Nonlinear Problems Solution with Numerical Methods of Cubic Convergence Order. *TEMA (São Carlos)*, 19(1), 161-179. 2018.
- SOUZA, L. A. F. D.; SANTOS, D. F. D., KAWAMOTO, R. Y. M.; VANALLI, L. New fourth-order convergent algorithm for analysis of trusses with material and geometric nonlinearities. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, p. 03093247211000528, 2021.

TANG, Y. Q.; ZHOU, Z. H.; CHAN, S. L. Nonlinear beam-column element under consistent deformation. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, v. 15, n. 05, p. 1450068, 2015.

VAN HAI, N.; NGHIEM, D. N. T.; CUONG, N. H. Large displacement elastic analysis of planar steel frames with flexible beam-to-column connections under static loads by corotational beam-column element. *Journal of Science and Technology in Civil Engineering (STCE)-NUCE*, v. 13, n. 3, p. 85-94, 2019.

YAW, L. L. *2D Corotational Beam Formulation*. Walla Walla University: 2009.